Feuille de TD 7 - Autres espaces vectoriels

Espace des polynômes

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}[T]$ l'ensemble des polynômes à coéfficients réels.

(a) Montrer que $\mathbb{R}[T]$ admet une structure d'éspace vectoriel réel.

(b) Est-ce que $\mathbb{R}[T]$ est un éspace vectoriel de type fini ? Justifier la réponse.

(c) Soit $\mathbb{R}_n[T] := \{P \in \mathbb{R}[T] \mid \deg P \leq n\}$ le sous-ensemble des polynômes de degré $\leq n$. Montrer que $\mathbb{R}_n[T]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[T]$ de type fini. Montrer que $\mathcal{E}_n = \{1, T, \ldots, T^n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[T]$ et en déduire la dimension.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la suite (P_0, P_1, P_2, P_3) , où

$$P_0 = (1-X)^3 \, , \; P_1 = X(1-X)^2 \, , \; P_2 = X^2(1-X) \, , \; P_3 = X^3$$

Calculer les coordonnées de P_j dans la base canonique $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$; en déduire que la suite (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}_2[X]$:

(a) $E = \{\, P \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, P(0) + P'(0) = 0 \;\text{ et }\; P(1) - P'(1) = 0\,\}$,

(b) $F = \left\{\, P \in \mathbb{R}_2[X] \,\middle|\, X^2 P'' + P' - 2P = 0\,\right\}$.

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du vecteur $(2, -1)$.

(b) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du polynôme $P(X) = 3X + 4$.

Exercice 5. On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que : $u(P) = P'$.

(a) Montrer que u est une application linéaire.

(b) Déterminer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.

(c) Plus généralement déterminer les sous-espaces $\operatorname{Ker} u^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(d) Même questions pour l'application $v : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que $v(P)$ est le polynôme $P(X+1) - P(X)$.

Exercice 6. Soit $V = \{P \in \mathbb{R}_3[T] \mid P(0) = 0, P(1) = 0, P'(1) = 0\}$.

(a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[T]$.

(b) Donner une base de V, et en déduire sa dimension.

Soit $f : \mathbb{R}_3[T] \to \mathbb{R}_2[T]$ donnée par $P(T) \mapsto P'(T) - (T+1)P''(T)$.

(c) Montrer que f définit une application linéaire de $\mathbb{R}_3[T] \to \mathbb{R}_2[T]$.

(d) Écrire la matrice associée à f par rapport à deux bases quelconques de $\mathbb{R}_3[T]$ et $\mathbb{R}_2[T]$.

(e) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$.

(f) Décrire l'espace $\operatorname{Ker} f \cap V$.

Exercice 7.

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (T-1, T+1, T^2-1)$ forme un base de $\mathbb{R}_2[T]$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, et $f : \mathbb{R}_2[T] \to \mathbb{R}_2[T]$ l'application linéaire représentée par la matrice A par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(b) Est-ce que f est inversible ?

(c) Soient $P_0(T) = 1$, $P_1(T) = T$, $P_2(T) = T^2$. Calculer $f(P_0), f(P_1), f(P_2)$.

(d) En déduire la matrice associée à f par rapport à la base $\mathcal{E} = (P_0, P_1, P_2)$.

(e) Soit $g : \mathbb{R}_2[T] \to \mathbb{R}_2[T]$ donnée par $P \mapsto P(0) + P'(0)T + P(1)(T+1)(T-2)$. Montrer que g est une application linéaire, et puis que $f = g$.

Exercice 8. Soit $\Delta : E \to E$ l'application définie par

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

(a) Montrer que Δ est une application linéaire de E dans E.

(b) Calculer $\Delta(X^k)$ pour $0 \le k \le 4$. Quel est son degré ? En déduire $\operatorname{Ker}\Delta$, $\operatorname{Im}\Delta$ et le rang de Δ.

(c) Soit Q un polynôme dans $\operatorname{Im}\Delta$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $\Delta(P) = Q$ et X^2 divise P.

Espaces vectoriels complexes

Exercice 9. Considerons l'espace $\mathbb{C}^2$, avec les operations de somme $(z_1, w_1) + (z_2, w_2) := (z_1 + z_2, w_1 + w_2)$ et produit par scalaire $\lambda \cdot (z, w) = (\lambda z, \lambda w)$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel complexe.

(b) Trouver une base de $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel complexe. Quelle est sa dimension complexe $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$?

(c) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel réel.

(d) Trouver une base de $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)$?

Soit $V = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

(e) Montrer que V est un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}^2$, mais il n'est pas un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^2$.

(f) Trouver une base de V comme sous-espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V)$?

Exercice 10. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}^n$, $n = 2, 3$, indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels complexes.

(a) $\{(\alpha + \beta, \alpha, 2\alpha - \mathrm{i}\beta) \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

(b) $\{(\alpha + \mathrm{i}, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.)

(c) $\{(\alpha, \mathrm{i}\alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\{(\alpha, \mathrm{i}\alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2\mathrm{i}x + (\mathrm{i}-1)y - z = 0\}$.

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| + |y| = 0\}$.

Exercice 11. Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées complexes $x, y, z \in \mathbb{C}$:

(a) $\begin{cases} x + \mathrm{i}y = 0 \\ 3x + 2y + z = 4 + \mathrm{i} \\ \mathrm{i}x - y + (1+\mathrm{i})z = 2 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} x + \mathrm{i}y - 3z = 1 \\ \mathrm{i}x - y - \mathrm{i}z = -1 \\ -x - \mathrm{i}y - (3+4\mathrm{i})z = -3 - 2\mathrm{i} \end{cases}$.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Pour quels valeurs de λ la matrice A est inversible ?

(b) Calculer A^{-1} pour λ qui satisfait la condition du point précédent.

(c) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) Quelle est la plus petite valeur de $k \in \mathbb{N}^*$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $A^k = \mathrm{Id}$? Quelles sont les valeurs de tels λ ?

Exercice 13. Parmi les applications suivantes $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels, déterminer les applications linéaires. Le cas écheant, fixer des bases de E et F, et déterminer la matrice associée par rapport aux bases choisies.

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z|$ (comme application $\mathbb{R}$-linéaire),

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}$ (comme application $\mathbb{C}$-linéaire),

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}$ (comme application $\mathbb{R}$-linéaire),

(d) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto e^{\pi \mathrm{i}/3} z + \mathrm{i} w$ (comme application $\mathbb{C}$-linéaire),

(e) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto e^{\pi \mathrm{i}/3} z + \mathrm{i} w$ (comme application $\mathbb{R}$-linéaire).

Espace de matrices

Exercice 14. Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées 3×3 à coefficients réels.

(a) Montrer que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. En donner la dimension et une base.

(b) Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & 0 & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer une base et la dimension de V.

Exercice 15. Soit $M_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de dimension n. Soient $S_n = \{A \in M_n \mid {}^tA = A\}$ l'espace des matrices symétriques, $A_n = \{A \in M_n \mid {}^tA = -A\}$ l'espace des matrices anti-symétriques.

(a) Montrer que M_n est un espace vectoriel, et S_n, A_n deux sous-espaces vectoriels de M_n.

(b) Trouver une base et en déduire la dimension de M_n, S_n et A_n.

(c) Montrer que $S_n \oplus A_n = M_n$.

Exercice 16. On pose :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & -b \\ a+2b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Donner une base et la dimension de F.

Exercice 17. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, et considerons l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $f(A) = AB$.

(a) Montrer que f est une application linéaire, et écrire la matrice associée à f par rapport à la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que f est inversible, et donner l'application réciproque.

Espace de suites

Exercice 18. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n \in \mathbb{R}\}$ l'espace des suites numériques réelles.

(a) Montrer que E est un espace vectoriel réel.

(b) Exibir une famille libre de cardinal denombrable. En déduir que E n'est pas un espace vectoriel de type fini.

Soit $V = \{(u_n)_n \in E \mid u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Montrer que V est un sous-espace de E.

(d) Trouver une base de V. En déduire la dimension de V.

Suggestion : remarquer que une suite $(u_n)_n \in V$ est déterminée par les valeurs de u_0 et u_1.

Exercice 19. Soit E l'espace vectoriel des suites numériques réelles. Soit q un nombre réel. Montrer que l'application qui, a toute suite numérique u_n, associe la suite v_n donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - qu_n$$

est un endomorphisme de E.

Espace de fonctions

Exercice 20. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-il des sous-espaces vectoriels ?

(a) $E_1 = \{f \mid f(0) = 1\}$,

(b) $E_2 = \{f \mid f(1) = 0\}$,

(c) $E_3 = \{f \mid f(1) = 2f(0)\}$,

(d) $E_4 = \{f \mid f(1) = f(0) + 2\}$,

(e) $E_5 = \{f \mid (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \le 0\}$,

(f) $E_6 = \{f \mid f' + f = 0\}$,

(g) $E_7 = \{f \mid f' + f = 1\}$,

(h) $E_8 = \{f \mid (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = f(-x)\}$,

(i) $E_9 = \{f \mid f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\}$,

(j) $E_{10} = \{f \mid f \text{ est dérivable deux fois sur } \mathbb{R}\}$.

Exercice 21. On considère $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine est $\mathbb{R}$. Étudier la liberté des familles (ou systèmes) suivants :

(a) $S_1 = \{1,\ x,\ \sin x\}$,

(b) $S_2 = \{1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x\}$,

(c) $S_3 = \{e^x,\ \sin x,\ x\}$,

(d) $S_4 = \{1,\ x-1,\ (x-1)(x-2)\}$.

Exercice 22. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, et les sous espaces

$$P = \{f \mid f(t) = f(-t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad I = \{f \mid f(t) = -f(-t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$$

des fonctions paires et impaires respectivement. Vérifier que $E = P \oplus I$.

Exercice 23. Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles définies et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que les applications $f \mapsto f(0)$, $f \mapsto f'(1)$ et $f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que les applications $f \mapsto f(0) + 1$ et $f \mapsto (f'(2))^2$ ne sont pas des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24. On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que les vecteurs $u_1 := x \mapsto \cos(x)\operatorname{ch}(x)$, $u_2 := x \mapsto \sin(x)\operatorname{ch}(x)$, $u_3 := x \mapsto \cos(x)\operatorname{sh}(x)$ et $u_4 := x \mapsto \sin(x)\operatorname{sh}(x)$ forment un système libre dans E.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre vecteurs u_i. Déterminer la matrice M de l'application $f \mapsto f'$ dans cette base.

(c) Calculer M^n pour $n \ge 1$.

Espace des applications linéaires

Exercice 25. Soient E, F deux espaces vectoriels, et soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E à F.

(a) Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

(b) Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $E^* := \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ (dit *espace dual* de E). Montrer que les applications $f_1, \dots, f_n \in E^*$ définies par $f_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$, pour $k = 1, \dots, n$, forment une base de E^*.

(c) Donner un isomorphisme entre $E = \mathbb{R}^3$ et E^*.

(d) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie, donnée par $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \cdot \dim F$.

Exercice 26. Soit E un espace vectoriel, et E^* son espace dual. Soit $V \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Soit

$$\mathrm{Ann}(V) := \{\phi \in E^* \mid \phi(v) = 0 \ \forall\ v \in V\},$$

dit *annulateur* de V.

(a) Montrer que $\mathrm{Ann}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E^*.

Soit maintenant $E = \mathbb{R}^3$, et $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, avec $v_1 = (2,1,0)$ et $v_2 = (0,0,1)$.

(a) Trouver une équation caractérisant $\mathrm{Ann}(V)$.

(b) Trouver une base de $\mathrm{Ann}(V)$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 27. Soit E un espace vectoriel et E^* son espace dual. Montrer que pour tout V, W sous-espaces vectoriels de E, on a

(a) $\mathrm{Ann}(V \cap W) = \mathrm{Ann}(V) + \mathrm{Ann}(W)$,

(b) $\mathrm{Ann}(V + W) = \mathrm{Ann}(V) \cap \mathrm{Ann}(W)$.

Orthogonals

Exercice 28. Pour $v = (x_1, \dots, x_n)$ et $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, on dénote par $\langle v, w\rangle := {}^t wv = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire standard entre v et w. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et notons par

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \forall v \in V\}$$

le sous-espace des vecteurs orthogonals à l'espace V.

(a) Montrer que $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, dit *orthogonal* de V (par rapport au produit scalaire standard).

(b) Soit $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_k\}$ une famille génératrice de V. Montrer que $V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v_i, w\rangle = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$.

(c) Montrer que $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$.

Exercice 29. Soient $v_1 = (2,1,0,1), v_2 = (3,-1,-1,0), v_3 = (1,-2,-1,-1)$, et $V = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(a) Trouver des équations caractérisants $V^\perp$.

(b) Trouver une base de $V^\perp$.

(c) Trouver des équations caractérisants V.

(d) Montrer que $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^4$.

Exercice 30. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et E^* son espace dual. Considerons l'application $\Phi : E \to E^*$ qui associe à v l'application $\Phi(v)$ donnée par

$$\Phi(v) : w \mapsto \langle v, w\rangle.$$

(a) Montrer que Φ est un isomorphisme entre E et E^*.

(b) Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E. Montrer que Φ induit un isomorphisme entre $V^\perp$ et $\mathrm{Ann}(V)$.

(c) Déduire que $\dim V^\perp = \dim \mathrm{Ann}(V) = n - \dim V$.

Mixte

Exercice 31. Soit $\mathbb{R}_2[T]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels, et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de dimension 2.

(a) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire linéaire surjective entre $\mathbb{R}_2[T]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $f : \mathbb{R}_2[T] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$f(P) = \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P(1) & P(2) - P''(0) \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que f est une application linéaire, et écrire la matrice associée par rapport aux bases $(1, T, T^2)$ et (E_1, E_2, E_3, E_4) de l'exercice 17.

(c) Calculer la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base.

(d) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Im} f$.

(e) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset S_n$ l'espace des matrices symétriques.

(f) Compléter (si nécessaire) $\mathcal{B}$ à une base de S_n.

Exercice 32. Soit $\mathbb{R}_2[T]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels, et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[T]$ l'application donnée par

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + \frac{b+c}{2}T + dT^2.$$

(a) Montrer que f est une application linéaire, et écrire la matrice associée par rapport aux bases (E_1, E_2, E_3, E_4) de l'exercice 17 et $(1, T, T^2)$.

(b) Calculer $\operatorname{Ker} f$.

(c) Montrer que pour tout $P(T) \in \mathbb{R}_2[T]$ il existe une unique matrice symétrique A telle que $f(A) = P$.